Probabilidades y Estadística II
Modelización de la incertidumbre
Incertidumbre y Probabilidad

Indice

1) Sucesos Aleatorios.
2) Espacio Muestral.
3) Operaciones con Sucesos.
4) Enfoques de la Probabilidad.
5) Axiomas de Kolmogorov.
6) Resultados Básicos con Probabilidades.
7) Variables Aleatorias.

Modelización de la incertidumbre

Resultados Básicos con Probabilidades

•Probabilidades condicionadas: $P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$,
$P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A)$, $P(A \mid B \cap C) = P(A \cap B \cap C) / P(B \cap C)$,….
$(E, \mathcal{A}, P(. \mid B))$ espacio de probabilidad condicionado a $B \in \wp(E)$, $P(B) > 0$.

•Probabilidad de la intersección $\equiv$ Regla de multiplicación o T^{ma} de producto
$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B) = P(B \mid A)\, P(A)$
$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B \mid A)\, P(C \mid A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B)\, P(C \mid A \cap B)$,….

•Independencia e independencia mutua.
$P(A \mid B) = P(A)$, $P(B \mid A) = P(B)$, $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$
$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$, $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)\, P(C)$,
$P(B \cap C) = P(B)\, P(C)$, en general, 2^{n-1} condiciones necesarias y suficientes para la independencia de n sucesos.

•Teorema de la Probabilidad Total
1. $A_1,..A_n$, n sucesos tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\cup^{\infty}_{i=1} A_i = E$ y se conocen $P(A_i)$,
2. $B \in \wp(E)$, tal que se conocen $(B \mid A_i)$

$$\Rightarrow P(B) = P(B \cap E) = P(B \cap (\cup^{\infty}_{i=1} A_i)) = \sum^{\infty}_{i=1} P(B \mid A_i)\, P(A_i)$$

$\{A_i\}^{\infty}_{i=1} \subset \mathcal{A}$: partición o sistema completo de sucesos

Modelización de la incertidumbre

Resultados Básicos con Probabilidades

A, B y C $\in$ (E, $\mathcal{A}$, P)

•Probabilidad de la unión:

$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$

•Probabilidades conjuntas:

$P(A \cap B)$, $P(A \cap \neg B)$, $P(\neg A \cap B)$, $P(\neg A \cap \neg B)$

2^2 sucesos Incompatibles. Tabla de doble entrada, dos dimensiones.

$P(A \cap B \cap C)$, $P(A \cap B \cap \neg C)$, $P(A \cap \neg B \cap C)$, $P(A \cap \neg B \cap \neg C)$

$P(\neg A \cap B \cap C)$, $P(\neg A \cap B \cap \neg C)$, $P(\neg A \cap \neg B \cap C)$, $P(\neg A \cap \neg B \cap \neg C)$.

2^3 sucesos Incompatibles. Tabla de triple entrada, tres dimensiones.

•Probabilidades marginales (sucesos incompatibles, suma por dimensiones):

$P(A) = P(A \cap B \cap C)+P(A \cap B \cap \neg C)+P(A \cap \neg B \cap C)+P(A \cap \neg B \cap \neg C)$

$P(A) = P(A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap \neg C)+P(A \cap \neg B \cap C \cup A \cap \neg B \cap \neg C)$

$P(A) = P(A \cap B \cap (C \cup \neg C)) + P(A \cap \neg B \cap (C \cup \neg C))$

$P(A) = P(A \cap B \cap E)+P(A \cap \neg B \cap E) = P(A \cap B \cup A \cap \neg B) = P(A \cap E) = P(A)$

Modelización de la incertidumbre
Resultados Básicos con Probabilidades

•**Árboles de probabilidades**
Herramienta de cálculo de probabilidades,
Factorización de la probabilidad conjunta

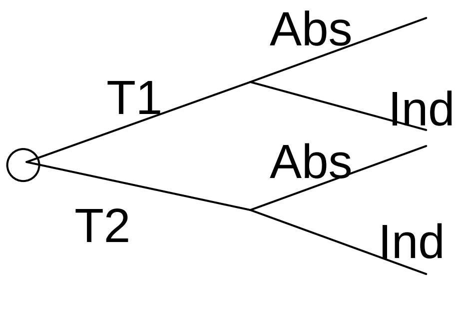
•Experimentos estructurados en etapas
Diagrama de árbol de la regla de multiplicación (regla de la cadena)

Ciertas direcciones de asignación son más sencillas, causalidad.

P(A,B,C)=P(A)*P(B|A)*P(C|A,B)
P(A,B,C)=P(C)*P(B|C)*P(A|B,C)

Posibles alternativas para factorizar y calcular la probabilidad.

P(T1)=0.7, P(T2)=1-P(T1),
P(Abs|T1)=0.4,P(Abs|T2)=0.8



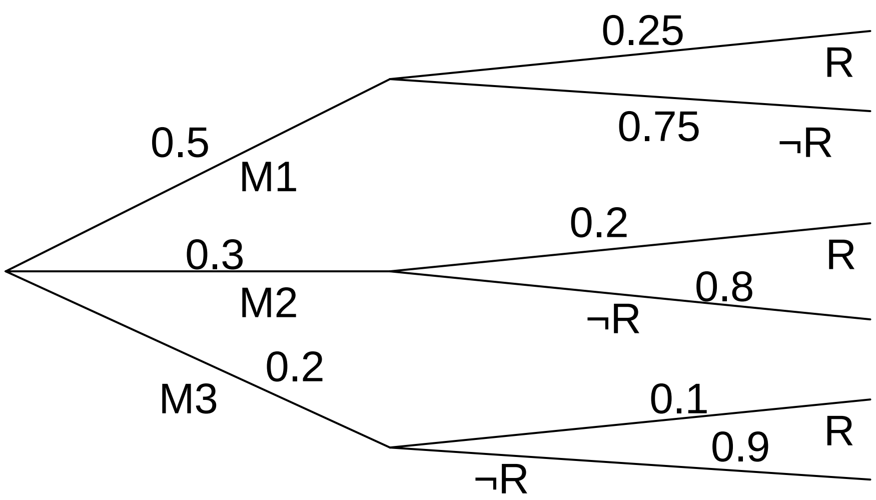
P(Ind)=?

Modelización de la incertidumbre
Resultados Básicos con Probabilidades

•**Árboles de probabilidades**

EJEMPLO:

Cadena de tiendas. Tres marcas de grabadoras de DVD: M1 M2 M3.
Ventas 50%, 30% y 20%, respect. Un año de garantía.
25% de M1, 20% de M2, 10% de M3 tienen avería en el periodo de garantía.
R: necesita reparación



$P(R \mid M1)\, P(M1) = P(R \cap M1) = 0.125$

$P(R \mid M2)\, P(M2) = P(R \cap M2) = 0.06$

$P(R \mid M3)\, P(M3) = P(R \cap M3) = 0.02$

Modelización de la incertidumbre

Resultados Básicos con Probabilidades

Revisión de juicios y teorema de Bayes.
Interpretación de pruebas diagnósticas y toma de decisiones

La dependencia entre sucesos conduce a modelos más complejos pero da la oportunidad de aprender

Proceso diagnóstico:

1. Observación y formulación e hipotesis
2. Observación de nuvos datos (pruebas)
3. Revisión de las creencias en las hipotesis (Teorema de Bayes)

1. Probabilidad a priori, juicio inicial (antecedentes, exploración, experiencia, literatura,…).

2. Test diagnóstico para reducir la incertidumbre

3. Probabilidad a posteriori (Bayes)

Modelización de la incertidumbre

Resultados Básicos con Probabilidades

Teorema de Bayes: actualización de creencias.

$\mathbf{P(S_i \mid R)} = P(S_i \cap R) / P(R) =$

- $(E, \mathcal{A}, P)$, $R \in \mathcal{A}$
- S_i: sistema completo de sucesos, $P(S_i) > 0$
- S_i causas (avería, enfermedad, tratamiento,…),
- R efecto (evidencia, observación, prueba, test,…)

definición de probabilidad condicionada y teorema probabilidad total

$= P(R \mid S_i)\, P(S_i) / P(R) = \mathbf{P(R \mid S_i)\, P(S_i) / (\sum^{n}_{i=1} P(R \mid S_i)\, P(C_i))}$

A: enfermedad presente / ausente.
B: a priori.
C: condicionado al test T(+/-).

A Diagnóstico	B* Probabilidad previa (%)	C* Probabilidad condicional del resultado (%)	D Producto (B x C)	E Probabilidad posterior† (%)
		Resultado positivo		
Presente	77	71	5.467	94
Ausente	22	15	330	6
		Total =	5.797	
		Resultado negativo		
Presente	77	29	2.233	54
Ausente	22	85	1.870	46
		Total =	4.103	

Modelización de la incertidumbre

Resultados Básicos con Probabilidades

Teorema de Bayes: actualización de creencias.

A: enfermedad (presente / ausente). Test T(+/-).

$P(A) = 0.77$, $P(\neg A) = 0.22$

$P(T+|\ A) = 0.71$, $P(T+|\ \neg A) = 0.15$

$P(T-|\ A) = 0.29$, $P(T-|\ \neg A) = 0.85$

$P(T+) = (P(T+|\ A)\ P(A)+P(T+|\ \neg A)\ P(\neg A)) = 0.579.$

$P(T-) = (P(T-|\ A)\ P(A)+P(T-|\ \neg A)\ P(\neg A)) = 0.410.$

$P(T+)+P(T-)=1.0.$

$P(A|\ T+) = P(T+|\ A)\ P(A)\ /\ P(T+) =$
$0.71*0.77\ /\ (0.71*0.77+0.15*0.22) = 0.943$

$P(\neg A|\ T+) = P(T+|\ \neg A)\ P(\neg A)\ /\ P(T+) =$
$0.15*0.22\ /\ (0.71*0.77+0.15*0.22) = 0.056$

$P(A|T+)+P(\neg A|T+)=1.0.$

$P(A|\ T-) = P(T-|\ A)\ P(A)\ /\ P(T-) =$
$0.29*0.77\ /\ (0.29*0.77+0.85*0.22) = 0.544$

$P(\neg A|\ T-) = P(T-|\ \neg A)\ P(\neg A)\ /\ P(T-) =$
$0.85*0.22\ /\ (0.29*0.77+0.85*0.22) = 0.455$

$P(A|T-)+P(\neg A|T-)=1.0.$

Interpretación